



TITLE:

# A General Framework for Dynamic Epistemic Logic( Digest\_要約 )

AUTHOR(S):

Motoura, Shota

---

CITATION:

Motoura, Shota. A General Framework for Dynamic Epistemic Logic. 京都大学, 2017, 博士(理学)

ISSUE DATE:

2017-03-23

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.k20159>

RIGHT:

学位規則第9条第2項により要約公開; 許諾条件により本文は2017-10-13に公開

# A General Framework for Dynamic Epistemic Logic

## 動的認識論理のための一般的枠組み

京都大学大学院 理学研究科 数学・数理解析専攻  
数理解析系 博士後期課程 4 回 本浦庄太

### 要約

知識や好み、信念といった人の認識は、コミュニケーション行為によって変化する。アナウンスがあれば知識が増え、提案を受ければ好みが変わる。このような現象を取り扱う論理は総じて動的認識論理と呼ばれ一つの研究分野をなしている。

動的認識論理では、まず様相論理という論理学を利用して人（エージェント）の認識を扱う。認識の状況は Kripke モデルと呼ばれるモデルで表現される。例えば、「 $n$  さんは事柄  $\varphi$  を知っている： $[n]\varphi$ 」という論理式が真であるのは、この Kripke モデルにおいて  $[n]\varphi$  が成り立っている時である。そして、コミュニケーション行為は認識の状況を変化させる作用として考えられ、Kripke モデルを変形（モデル変換）する手続きとして与えられる。たとえば、「 $\varphi$  というアナウンスの後、 $n$  さんは  $\varphi$  を知っている： $[[!\varphi]]([n]\varphi)$ 」という論理式は、今のモデルをアナウンスの影響を表す変換手続きで変形した後、新しい Kripke モデルで  $[n]\varphi$  が成り立っていることとされる。この分野では、これまでに公開的告知の論理（PAL）[3]、認識行為の論理（EA）[1]、嗜好更新（PU）[5] などの多くの認識と行為がモデル化されている。

一方、一階述語論理ほど自明ではないが、様相論理においても公理で性質を記述することができる。Kripke モデルは集合とその上の二項関係をベースとしたモデルであり、例えば S5 と呼ばれる公理はこの二項関係が同値関係であることを表す、すなわちそのようなモデルのクラスに対応する。

本論文では、動的認識論理の各公理がモデル変換のどのような性質を記述するのか、その対応を調べる。我々はこれを以下のように実現する。まず、「動的認識論理の一般的枠組み」を定義する。これは「汎用言語」と大きなモデル「モデル遷移系」たちから成る。汎用言語はエージェントの集合  $\mathcal{E}$  と行為の集合  $\mathcal{A}$  でパラメタライズされた言語  $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{A})$  であり、典型的な論理式は  $[[\alpha]]([e]\varphi)$  である（ $\alpha \in \mathcal{A}$ 、 $e \in \mathcal{E}$ ）。これは行為  $\alpha$  のあとで  $e$  が  $\varphi$  を知る、好む、信じるなどに相当する。PAL や EA といった個別の論理の言語はこの汎用言語の具体例となる。一方、モデル遷移系は、直観的には、Kripke モデルたちからなる族とその族の上の二項関係である。この Kripke モデルをつなぐ二項関係はモデル変換による遷移を静的に表現している。したがって、PAL や EA のモデル変換はモデル遷移系で表現することができる。その上、二項関係という数学的構造であるから、手続きではなく一般的（抽象的）にモデル変換を考えることができ、モデル遷移系を用いて汎用言語を抽象的なまま解釈することもできる。

次に、「公理がモデル遷移系の性質に対して正準的（canonical）である」という条件を定義する。正準性は健全かつ完全な対応より強い対応である。公理  $A$  の性質  $P$  に対する正準性が言えれば、様相論理のベースとなる証明体系  $K$  に公理  $A$  を追加した体系は性質  $P$  を満たすモデル遷移系全体からなるクラスに対して健全かつ完全であるということが言える。正準性の概念は大域演算子  $E\varphi$  の名で知られる補助演算子を用いてシンプルに定義されるが、少々技術的な説明を要するため詳細は論文の 4 章を参照されたい。

以上の枠組みにおいて、我々は多くの公理とモデル遷移系の性質の間の対応を示す。例えば、 $D_t$  と名付けられたある公理は変換後のモデルが一意に定まるという性質に、別の公理  $P$  はモデル変換によって変わるの認識だけであり原始的な事実是不変という性質に対応している。

またこのモデル遷移系は Kripke モデルという二項関係の上に張られた二項関係であり、実際に「二層 Kripke モデル」と見ることができる。そこで、様相論理におけるさまざまな概念を二層化し、モデル遷移系の概念へと拡張する。特に、Kripke モデル同士の双模倣と呼ばれるある種の等価性の概念を「二層双模倣」という概念へと拡張し、その概念に対して以下のような結果を得る：

（裏へ続く）

- 一定の条件の下では、2つのモデル遷移系が論理式で区別がつかないことと二層双模倣であることは同値である (Hennessy-Milner 性);
- PAL や EA のモデル変換を表すモデル遷移系では通常の変換と二層双模倣は同値である。

さらに、正準性による対応結果や二層双模倣の性質を応用し、いくつかの論理の完全性を証明する。具体的には、PAL や EA の完全性に対する別証明 (それぞれ [7] と [6]) の手法を、モデル遷移系を用いて一般化し、他の論理にも応用ができるようにする。そして実際に、今まで証明されていなかった、TPAL [4] や TEA [2] と呼ばれる PAL や EA の変種の、モデル変換を用いた意味論に対する完全性を証明する (TEA については [6] で証明された制限付き TEA の完全性を制限なしで証明)。加えて、PAL や EA よりも弱い論理 LE、LSP 考え、その意味論をモデル遷移系を用いて定義し、その完全性も上の手法を一部用いて示す。

## 参考文献

- [1] A. Baltag, L. S. Moss, and S. Solecki. The logic of public announcements, common knowledge, and private suspicions. In *Proceedings of the 7th Conference on Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge*, pp. 43–56. Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1998.
- [2] T. Hoshi and A. Yap. Dynamic epistemic logic with branching temporal structures. *Synthese*, 169(2):259–281, 2009.
- [3] J. Plaza. Logics of public communications. In *Proceedings of the fourth international symposium on methodologies for intelligent systems: Poster session program*, pp. 201–216. Oak Ridge National Laboratory, 1989.
- [4] J. van Benthem, J. Gerbrandy, T. Hoshi, and E. Pacuit. Merging frameworks for interaction. *Journal of Philosophical logic*, 38(5):491–526, 2009.
- [5] J. van Benthem and F. Liu. Dynamic logic of preference upgrade. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 17(2):157–182, 2007.
- [6] Y. Wang and G. Aucher. An alternative axiomatization of del and its applications. In *IJCAI-International Joint Conference in Artificial Intelligence-2013*, pp. 1139–1146, 2013.
- [7] Y. Wang and Q. Cao. On axiomatizations of public announcement logic. *Synthese*, 190(1s):103–134, 2013.

# A General Framework for Dynamic Epistemic Logic

Shota Motoura

## Digest

Human beings' knowledge, beliefs and preferences are changed by actions of communication. If one receives an announcement, this augments his or her knowledge. If one accepts a suggestion, one's preference changes. Logics which deal with such phenomena are called *dynamic epistemic logics* (DELs), which constitute an eponymous research field, *Dynamic Epistemic Logic* (DEL).

In this field, the knowledge or preference of *agents* is dealt with by modal logic. An epistemic situation is expressed by a *Kripke model*. Thus, a formula  $[n]\varphi$  (agent  $n$  knows  $\varphi$ ) is interpreted by means of a Kripke model. On the other hand, an action of communication is considered to cause a change in an epistemic situation, and thus each kind of action is defined to be a procedure of changing Kripke models, which is called *model transformation*. For example, a formula  $[[!\varphi]]([n]\varphi)$  (after an announcement of  $\varphi$ , agent  $n$  knows  $\varphi$ ) is true when  $[[!\varphi]]([n]\varphi)$  holds in the Kripke model transformed from the original one by the procedure associated to an announcement of  $\varphi$ . There have been many DELs proposed up to the present day: Public Announcement Logic (PAL) [3], Epistemic Action (EA) [1], Preference Upgrade (PU) [5], among others.

In this thesis we mainly consider *modal correspondence* in DEL. Modal correspondence means in *modal logic* a correspondence between axioms and properties of Kripke models. We can describe properties of Kripke models by using the language of modal logic, even though this is not as trivial as in the case of first-order predicate logic. A Kripke model is based on a pair of a carrier set and a family of binary relations on it, and the axiom called **S5**, for example, corresponds to the class of Kripke models whose binary relations are equivalence ones.

We technically materialise our setting for modal correspondence in *DEL* as follows. We first define a general framework for DELs. This consists of a generic language and *model transition systems* (MTSs). The language  $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{A})$  is parameterised in a set  $\mathcal{E}$  of *epistemic expressions* and a set  $\mathcal{A}$  of action expressions. A typical formula is  $[[\alpha]]([e]\varphi)$  ( $\alpha \in \mathcal{A}$ ,  $e \in \mathcal{E}$ ), whose intended meaning is that, after an action  $\alpha$ , agent  $e$  knows/prefers/believes  $\varphi$ . The languages of PAL and EA are instances of this generic language. On the other hand, an MTS, roughly speaking, is based on a pair of a family of Kripke models linked by  $\alpha$ -labelled binary relations. These binary relations express model transformations in a static way. Therefore, we can express model transformations in PAL and EA. In addition, as they are binary relations, we can also define a specific model transformation in an abstract way, rather than in the form of a procedure. This is crucial for the interpretation of the generic language.

We next define the condition that a DEL axiom is *canonical* for a property of MTSs. Canonicity is a stronger condition than the correspondence via soundness and (strong) completeness. That is to say, from the canonicity of an axiom **A** for a property  $P$ , we can infer that the base proof system **K** for modal logic together with **A** is sound and (strongly) complete with respect to the class of MTSs satisfying  $P$ . The notion of canonicity is defined by using an auxiliary operator  $E\varphi$ , known as the *global operator*. The definition is simple, but requires technical background knowledge of modal logic. We refer the reader to Chapter 4 of the thesis.

In the setting above, we show many correspondence results. For example, an axiom, called **D<sub>t</sub>**, indicates the determinism of model transformations expressed in the MTS, and another axiom **P** denotes the property that the model transformations in the MTS only change epistemic situations and preserve the truth value of the atomic facts.

Furthermore, we show a number of technical results on MTSs. We can regard an MTS as a *two-layered Kripke model*, since an MTS is a family of binary relations on a family of Kripke models. Therefore, MTSs readily inherit various notions from Kripke models. In particular, the notion of bisimilarity, a kind of equivalence between Kripke models, can be extended to that of *two-layered bisimilarity* (*2-bisimilarity*), and several properties associated with the new notion are obtained. For example:

- under a specific condition, two MTSs cannot be distinguished in terms of formulae if and only if these two are 2-bisimilar (the Hennessy-Milner property);
- given two MTSs expressing model transformations in PAL or EA, bisimilarity between internal Kripke models implies 2-bisimilarity between the MTSs.

Moreover, by using the correspondence results and properties of 2-bisimulation, we prove completeness for several logics. Specifically, we generalise the methods which are used to give alternative proofs to the completeness theorems for PAL and EA in [7] and [6], respectively, in order that the methods become

applicable to other logics. We then put the generalised method into practice to obtain completeness for variants of PAL and EA, called *TPAL* [4] and *TEA* [2] (our completeness for TEA is the *full* extension of restricted completeness in [6]). In addition, we define sublogics of PAL and EA, *LE* and *LSP*, and their semantics using MTSSs, and then prove their completeness by the generalised method above.

## References

- [1] Alexandru Baltag, Lawrence S Moss, and Slawomir Solecki. The logic of public announcements, common knowledge, and private suspicions. In *Proceedings of the 7th Conference on Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge*, pages 43–56. Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1998.
- [2] Tomohiro Hoshi and Audrey Yap. Dynamic epistemic logic with branching temporal structures. *Synthese*, 169(2):259–281, 2009.
- [3] Jan Plaza. Logics of public communications. In *Proceedings of the fourth international symposium on methodologies for intelligent systems: Poster session program*, pages 201–216. Oak Ridge National Laboratory, 1989.
- [4] Johan van Benthem, Jelle Gerbrandy, Tomohiro Hoshi, and Eric Pacuit. Merging frameworks for interaction. *Journal of Philosophical logic*, 38(5):491–526, 2009.
- [5] Johan van Benthem and Fenrong Liu. Dynamic logic of preference upgrade. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 17(2):157–182, 2007.
- [6] Yanjing Wang and Guillaume Aucher. An alternative axiomatization of del and its applications. In *IJCAI-International Joint Conference in Artificial Intelligence-2013*, pages 1139–1146, 2013.
- [7] Yanjing Wang and Qinxiang Cao. On axiomatizations of public announcement logic. *Synthese*, 190(1s):103–134, 2013.